第 40 卷　第 3 期
2023 年 6 月

应　用　力　学　学　报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 40 No. 3
Jun. 2023

文章编号:1000-4939(2023)03-0580-09

基于严格极限平衡法的边坡安全系数上下限解

许佳君[1],朱大勇[2],姚华彦[1],段海澎[3]

(1.合肥工业大学土木与水利工程学院,230009 合肥;2.浙大宁波理工学院土木建筑工程学院,315100 宁波;
3.安徽省交通控股集团有限公司,230088 合肥)

摘　要:严格极限平衡法满足所有的平衡条件,通常计算精度较高,但不能保证所有条块界面上均不违背摩尔-库仑准则,也不能保证充分发挥其抗剪强度,因此在理论上既不是下限解、也不是上限解,且计算结果一定程度上依赖于条块间作用力关系的假设。将安全系数作为设定值,以滑面正应力为未知变量,将水平地震力影响系数作为目标函数,根据边坡整体的水平力平衡条件,建立目标函数表达式;再根据边坡局部力平衡条件及条块间接触面、滑动面上的破坏准则建立不等式约束条件,根据边坡整体的竖向力与力矩平衡条件建立等式约束。目标函数及约束条件构成标准线性规划数学模型,应用单纯形法可以精确得到设定安全系数下的使边坡达到极限平衡状态的最大与最小水平地震力影响系数。通过迭代求解,得到既定水平地震力影响系数下的基于严格极限平衡的边坡安全系数上下限解答。算例计算结果表明,这种安全系数上下限解范围一般小于5%,且条块间作用力不违背破坏准则且充分发挥抗剪强度,因此计算结果更可靠,且理论上更为严密。

关键词:严格极限平衡;安全系数;水平地震力影响系数;上下限解;线性规划;优化

中图分类号:TU431　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2023.03.009

The upper and lower-bound solutions of slope safety factor based on rigorous limit equilibrium method

XU Jiajun[1], ZHU Dayong[2], YAO Huayan[1], DUAN Haipeng[3]

(1. School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, 230009 Hefei, China;
2. School of Civil Engineering and Architecture, NingboTech University, 315100 Ningbo, China;
3. Anhui Transportation Holding Group CO., LTD., 230088 Hefei, China)

Abstract: The rigorous limit equilibrium method satisfies all of the equilibrium conditions, commonly with high accuracy. However, such a solution may represent neither the lower solution, nor the upper one, as the forces acting upon the interslice surfaces with some assumptions cannot ensure non-violation of failure criterion and full mobilization of those shear strengths, the results of which, to some degree, are dependent upon the assumptions made about the relationships between the interslice forces. In the paper, with the value of the factor of safety initially assumed, the normal stresses acting on the slip surface are taken as the un-

收稿日期:2021-10-20　　**修回日期**:2021-11-24
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 52079121);浙江大学宁波研究院大湾区环境岩土工程与基础建设新材料研究资助项目(No. 20190909HK0202)
通信作者:朱大勇,教授、博士生导师。E-mail:zdy@nit.net.cn
引用格式:许佳君,朱大勇,姚华彦,等. 基于严格极限平衡法的边坡安全系数上下限解[J].应用力学学报,2023,40(3):580-588.
XU Jiajun, ZHU Dayong, YAO Huayan, et al. The upper and lower-bound solutions of slope safety factor based on rigorous limit equilibrium method[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2023, 40(3):580-588.

knowns and the coefficient of horizontal seismic forces as the objective function, the equation of the objective function is established according to the horizontal force equilibrium for the whole body of sliding mass. Then, the inequality constraint conditions are established according to the equilibrium condition of local sliding body and the failure criteria for both interslice surfaces and the slip surfaces, and the equality constraint condition is further established according to the vertical force and moment equilibrium conditions for the whole body of sliding mass. The equation of objective function as well as these constraint conditions thus constitutes a standard linear programming program; the maximum and minimal values of the coefficient of horizontal seismic forces, causing the sliding mass into rigorous limit equilibrium condition, can be precisely determined by using the simplex method. The final upper- and lower bound solutions for values of the factor of safety associated the prescribed coefficient of horizontal seismic force can be obtained by adopting an iterative procedure. The results of example study show that the difference between the upper and lower bounds of the factor of safety is within the range of 5% of the average value. Since the interslice forces on the all the interslice surfaces do not violate the failure criterion and, the shear strength of which is, to the largest extent, mobilized. Therefore, the results of present method are reasonable and theoretically rigorous.

Key words: rigorous limit equilibrium; safety factor; upper-bound solution; lower-bound solution; linear programming; optimization

尽管有限元等数值方法在岩土工程领域得到广泛应用[1-2]，但极限平衡法仍是边坡工程中最常用分析方法，并被各类工程勘察设计规范纳入必选方法[3-5]。早期极限平衡法如瑞典条分法[6]、简化 Janbu 法[7]、美国陆军工程师团法[8]等只满足部分力或力矩平衡条件，计算结果精度较差（相对于满足所有平衡条件的严格极限平衡法）。后来发展了严格极限平衡法如严格 Janbu 法[9-10]、Morgenstern-Price 法[11-12]、Spencer 法[13]及基于滑面正应力修正的安全系数显式解法[14]，这些严格法安全系数计算精度大为提高。

但必须指出，尽管严格极限平衡法满足所有平衡条件，但是计算结果一定程度上还依赖于条间力作用方式，它们计算精度高是基于大量实际计算结果经验总结得出的，没有得到严格理论证明。同时，严格极限平衡法不能保证所有条间力都能不超过摩尔库仑准则所限定的剪切力极限值，因而不是下限解；另外，严格极限平衡法条间力假设不能充分发挥条间的抗剪强度，因此它也不是上限解。对于非圆滑面不同严格法安全系数相差也会达到 11%[15]，真正的严格极限平衡法安全系数合理范围至今仍未获得，因此基于严格极限法的上下限解的研究具有重要理论意义，同时缩小严格极限法安全系数可能范围又具有很大的工程应用价值。

本研究不采用传统的严格极限平衡法中的条间力假设，而是基于滑面正应力修正的极限平衡法基本思想[16]，将滑面正应力作为未知变量，将设定的安全系数下使边坡达到极限平衡状态的水平地震力影响系数作为目标函数，根据边坡整体与局部平衡条件及滑面与条块界面上摩尔库仑破坏准则，建立目标函数的线性表达式，及其相关线性等式与不等式约束条件，构成标准的线性规划问题，用单纯形法[17-18]求解最大与最小的水平地震力影响系数。通过适当迭代方法，进而求出基于严格极限平衡法的边坡安全系数上下限解。

1　严格极限平衡法基本方程

对于给定滑面位置的边坡（如图 1 所示），作用于滑体上的力有滑体总自重 W 和总水平地震力 $K_c W$，K_c 为水平地震力影响系数。将滑体划分为 n 个条块，条块底面宽度为 b_i（条块自右向左编号），则条块底面上总正应力 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \cdots \quad \sigma_n]^{\mathrm{T}}$，剪应力 $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \cdots \quad \tau_n]^{\mathrm{T}}$，及孔隙水压力 $\boldsymbol{u} = [u_1 \quad u_2 \cdots \quad u_n]^{\mathrm{T}}$。滑面上各条块底面的有效内摩擦角和凝聚力分别为 φ_i 和 c_i，边坡安全系数设定为 F_s，由摩尔-库仑强度破坏准则得

$$\tau_i = \frac{(\sigma_i - u_i)\tan\varphi_i + c_i}{F_s} \tag{1}$$

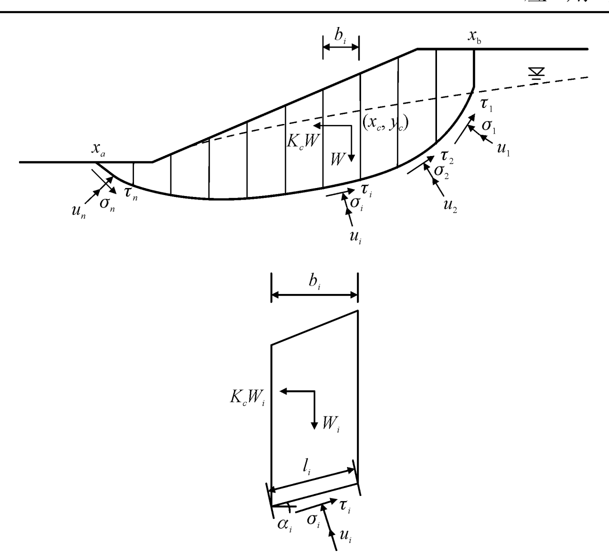


图1 边坡滑体及受力示意图

Fig. 1 Diagram of sliding body and forces

严格极限平衡法要求滑体满足所有力和力矩平衡条件,对于二维边坡,分别是水平力、垂直力和力矩平衡。根据滑体的受力情况,对滑体大致中心,坐标(x_c, y_c),取矩,有

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i l_i \cos\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i l_i \sin\alpha_i = K_c W$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i l_i \sin\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i l_i \cos\alpha_i = W$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\tau_i l_i \sin\alpha_i + \sigma_i l_i \cos\alpha_i)(x_i - x_c) + \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i l_i \sin\alpha_i - \tau_i l_i \cos\alpha_i)(y_i - y_c) = 0$$

其中:α_i 为条块 i 的底面倾角;(x_i, y_i) 为第 i 个条块底面中心坐标;条块底面长度为 $l_i = b_i/\cos\alpha_i$,将 $l_i = b_i/\cos\alpha_i$ 代入以上各式,则整理可得3个平衡方程,即

$$K_c W - \sum_{i=1}^{n} b_i(\tau_i - \sigma_i \tan\alpha_i) = 0 \tag{2a}$$

$$W - \sum_{i=1}^{n} b_i(\tau_i \tan\alpha_i + \sigma_i) = 0 \tag{2b}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\tau_i \tan\alpha_i + \sigma_i)(x_i - x_c) + \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i \tan\alpha_i - \tau_i)(y_i - y_c) = 0 \tag{2c}$$

令 $C_i = c_i - u_i \tan\varphi_i$,将式(1)代入式(2)的3个平衡方程中,则有

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\left(\frac{1}{F_s}\tan\varphi_i - \tan\alpha_i\right)\sigma_i = K_c W - \frac{1}{F_s}\sum_{i=1}^{n} b_i C_i \tag{3a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\left(1 + \frac{1}{F_s}\tan\varphi_i \tan\alpha_i\right)\sigma_i = W - \frac{1}{F_s}\sum_{i=1}^{n} b_i C_i \tan\alpha_i \tag{3b}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1 + \frac{1}{F_s}\tan\varphi_i \tan\alpha_i\right)(x_i - x_c) + \left(\tan\alpha_i - \frac{1}{F_s}\tan\varphi_i\right)(y_i - y_c)\right]\sigma_i = \frac{1}{F_s}\sum_{i=1}^{n} C_i[(y_i - y_c) - \tan\alpha_i(x_i - x_c)] \tag{3c}$$

取图1中第 $1\sim j$ 个条块整体(局部滑体)作为研究对象,如图2所示,W_j 为第 $1\sim j$ 个条块整体自重,P_j 和 T_j 分别为作用于第 j 和 $j+1$ 个条块之间接触面上的法向力和切向力,U_j 为作用于接触面上的水压力,$j = 1,2,\cdots,n-1$。

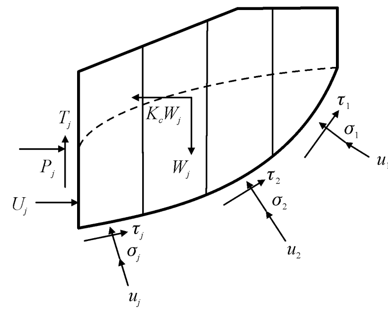


图2 局部滑体条块上的作用力示意图

Fig. 2 Forces on a local sliding body

根据水平和竖直方向力的平衡条件可得

$$P_i = K_c W_j + \sum_{i=1}^{j} b_i\left(\tan\alpha_i - \frac{1}{F_s}\tan\varphi_i\right)\sigma_i - \frac{1}{F_s}\sum_{i=1}^{j} b_i C_i \tag{4a}$$

$$T_i = W_j + \sum_{i=1}^{j} b_i\left(1 + \frac{1}{F_s}\tan\varphi_i \tan\alpha_i\right)\sigma_i - \frac{1}{F_s}\sum_{i=1}^{j} b_i C_i \tan\alpha_i \tag{4b}$$

2 线性规划问题的构建

滑体水平方向力的平衡方程式(4a)可以写成

$$K_c = \frac{1}{W}\sum_{i=1}^{n} b_i\left(\frac{1}{F_s}\tan\varphi_i - \tan\alpha_i\right)\sigma_i + \frac{1}{F_s W}\sum_{i=1}^{n} b_i C_i \tag{5}$$

由式(5)可以看出,边坡的水平地震力影响系数 K_c 与滑面上的正应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 呈线性关系。

假设边坡滑面固定,初始设定安全系数 F_s 值,采用线性规划方法,以水平地震力影响系数 K_c 作为目标函数,以滑面正应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 为未知变量。以 K_c 为目

标函数时，求解得到的 K_c 愈大，说明若边坡达到极限平衡状态时所需的水平地震力愈大，对应的安全系数 F_s 也愈大；反之得到的 K_c 愈小，对应的安全系数 F_s 也愈小。由此可将求解边坡安全系数的上、下限解问题转化成求解边坡处于极限平衡状态时水平地震力影响系数的最大值和最小值问题。同时，将滑体整体满足力和力矩平衡条件，条块间接触面不违背摩尔-库仑准则，不产生拉应力，滑体满足运动许可等作为约束条件，构建线性规划数学模型，求解得到水平地震力影响系数的最大值和最小值，进而得到基于严格极限平衡法的边坡安全系数上限解和下限解。

2.1　目标函数建立

式(5)中，令

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{W}\Big[b_1\Big(\frac{1}{F_s}\tan\varphi_1-\tan\alpha_1\Big),\ b_2\Big(\frac{1}{F_s}\tan\varphi_2-\tan\alpha_2\Big),\cdots,\ b_n\Big(\frac{1}{F_s}\tan\varphi_n-\tan\alpha_n\Big)\Big],$$

$$K_0=\frac{1}{F_sW}\sum_{i=1}^{n}b_iC_i$$

则目标函数可写成

$$\max\quad K_c=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}+K_0,\qquad \min\quad K_c=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}+K_0 \tag{6}$$

2.2　线性规划问题应满足的约束条件

2.2.1　各条间接触面上法向力与切向力的关系不应违背摩尔-库仑破坏准则

滑体作为整体滑移，不应在条块间接触面上先发生破坏，因此作用于第 j 个和第 $j+1$ 个条块间接触面上的法向力 P_j 和切向力 T_i 的力学关系应当不违背摩尔-库仑准则，即有

$$T_j\leqslant\frac{(P_j-U_j)\tan\varphi_j'+c_j'L_j}{F_s}\quad(j=1,2,\cdots,n-1)\tag{7}$$

其中：φ_j' 和 c_j' 分别为条块线上土体的平均内摩擦角和黏聚力；U_j 为作用于接触面上的水压力；L_j 为该条块线的长度。

令式(7)不等式右边为 T_j'，即

$$T_j'=\frac{(P_j-U_j)\tan\varphi_j'+c_j'L_j}{F_s}$$

则 T_j' 表示在临界状态下，由摩尔-库仑准则求得的条间接触面上切向力的理论值，根据上述约束条件，条间接触面上切向力的实际值 T_j 应不大于理论值 T_j'，即式(7)可表示为 $T_j\leqslant T_j'$。

由式(4a)、(4b)和式(6)、(7)整理可得

$$(\boldsymbol{\eta}_j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\zeta}_j^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\sigma}\leqslant\boldsymbol{K}_j-K_0\boldsymbol{\eta}_j\tag{8}$$

式中，

$$\boldsymbol{\eta}_j=\begin{bmatrix}-W_1\tan\varphi_1'\\-W_2\tan\varphi_2'\\\vdots\\-W_j\tan\varphi_j'\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\zeta}_j^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\zeta_{11}^{\mathrm{T}}&0&0&\cdots&0\\\zeta_{21}^{\mathrm{T}}&\zeta_{22}^{\mathrm{T}}&0&\cdots&0\\\zeta_{31}^{\mathrm{T}}&\zeta_{32}^{\mathrm{T}}&\zeta_{33}^{\mathrm{T}}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\zeta_{j1}^{\mathrm{T}}&\zeta_{j2}^{\mathrm{T}}&\zeta_{j3}^{\mathrm{T}}&\cdots&\zeta_{jj}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

$$\zeta_{jk}^{\mathrm{T}}=b_j\Big(F_s+\tan\varphi_k\tan\alpha_k+\tan\varphi_k'\tan\alpha_k-\frac{1}{F_s}\tan\varphi_j'\tan\varphi_k\Big)$$

$(k=1,2,\cdots,j;\ j=1,2,\cdots,n-1)$，

$$\boldsymbol{K}_j=\begin{bmatrix}-F_sW_1+c'_1L_1-\dfrac{b_1\tan\varphi'_1}{F_s}C_1+b_1C_1\tan\alpha_1\\-F_sW_2+c'_2L_2-\dfrac{\tan\varphi'_2}{F_s}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}b_iC_i+\sum_{i=1}^{2}b_iC_i\tan\alpha_i\\-F_sW_j+c'_jL_j-\dfrac{\tan\varphi'_j}{F_s}\displaystyle\sum_{i=1}^{j}b_iC_i+\sum_{i=1}^{j}b_iC_i\tan\alpha_i\end{bmatrix}$$

若需所有条块间接触面上法向力和切向力的关系均满足该约束条件，则式(8)共计由 $n-1$ 个方程组成。

2.2.2　条块间不产生拉应力

土体抗拉强度很小，因此条块间不应产生拉应力，对于滑面入口可能出现的土体拉应力情况，可设置张拉裂缝予以消除。以图 2 所示 P_j 的方向为正方向，则应有条间接触面上的有效法向推力 $P_j-U_j>0$，由式(4a)和式(6)整理可得

$$-(\boldsymbol{W}_j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\lambda}_p^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\sigma}<\boldsymbol{K}_P\tag{9}$$

其中，

$$\boldsymbol{W}_j=[W_1\quad W_2\quad\cdots\quad W_j]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_p=\begin{bmatrix}b_1\Big(\tan\alpha_1-\dfrac{1}{F_s}\tan\varphi_1\Big)\\b_2\Big(\tan\alpha_2-\dfrac{1}{F_s}\tan\varphi_2\Big)\\\vdots\\b_j\Big(\tan\alpha_j-\dfrac{1}{F_s}\tan\varphi_j\Big)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_P=K_0\boldsymbol{W}_j-\frac{1}{F_s}\sum_{i=1}^{j}b_iC_i-U_j,$$

$$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_1\quad\sigma_2\quad\cdots\quad\sigma_j]^{\mathrm{T}}(j=1,2,\cdots,n-1)$$

式(9)同样由 $n-1$ 个方程组成。

2.2.3 滑体满足运动许可

滑体及条块间接触面上的作用力需满足运动许可,即如图 2 所示的 T_j 方向为正方向,还应有 $T_j > 0$,由式(4b)整理可得

$$\boldsymbol{\lambda}_T^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} < \boldsymbol{K}_T \tag{10}$$

其中,

$$\boldsymbol{\lambda}_T = \begin{bmatrix} b_1\left(1+\dfrac{1}{F_s}\tan\varphi_1\tan\alpha_1\right) \\ b_2\left(1+\dfrac{1}{F_s}\tan\varphi_2\tan\alpha_2\right) \\ \vdots \\ b_j\left(1+\dfrac{1}{F_s}\tan\varphi_j\tan\alpha_j\right) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_T = \boldsymbol{W}_j - \frac{1}{F_s}\sum_{i=1}^{j} b_i C_i \tan\alpha_i ,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \cdots \quad \sigma_j]^{\mathrm{T}} (j=1,2,\cdots,n-1)$$

式(10)由 $n-1$ 个方程组成。

2.2.4 滑体满足竖直力平衡条件

根据滑体竖直力的平衡方程,令

$$\boldsymbol{\mu}_y = \begin{bmatrix} b_1\left(1+\dfrac{1}{F_s}\tan\varphi_1\tan\alpha_1\right) \\ b_2\left(1+\dfrac{1}{F_s}\tan\varphi_2\tan\alpha_2\right) \\ \vdots \\ b_n\left(1+\dfrac{1}{F_s}\tan\varphi_n\tan\alpha_n\right) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_y = W - \frac{1}{F_s}\sum_{i=1}^{n} b_i C_i \tan\alpha_i$$

则式(3b)可记为

$$\boldsymbol{\mu}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{K}_y \tag{11}$$

2.2.5 滑体满足力矩平衡条件

根据滑体整体的力矩平衡方程,令

$$\boldsymbol{\mu}_M^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{\mu}_1^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\mu}_2^{\mathrm{T}}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\mu}_n^{\mathrm{T}}]$$

$$\boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{T}} = \left(1+\frac{1}{F_s}\tan\varphi_i\tan\alpha_i\right)(x_i - x_c) + \left(\tan\alpha_i - \frac{1}{F_s}\tan\varphi_i\right)(y_i - y_c)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

$$\boldsymbol{K}_M = \frac{1}{F_s}\sum_{i=1}^{n} C_i[(y_i - y_c) - \tan\alpha_i(x_i - x_c)]$$

则式(3c)可记为

$$\boldsymbol{\mu}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{K}_M \tag{12}$$

3 求解步骤

根据上述构建的数学模型,可编写计算机程序来求解该线性规划问题。

求解水平地震力影响系数 K_c 最大值,首先假设初始安全系数 F_s,由上述构建的目标函数方程(6),以及滑体和条块间接触面应满足的各项约束条件方程式(8)~(12)。应用单纯形法[17-18],可以求解得到 K_c。通过对比求解得到的 K_c 与边坡原本给定的 K_{c0},调整程序中代入的初始安全系数 F_s,若 $K_c < K_{c0}$,则说明假定的初始安全系数 F_s 比实际的安全系数大,为使 K_c 增大,则需减小代入的安全系数,反之同理。若干次迭代后,当 $|K_c - K_{c0}| \leqslant \varepsilon$ 时,说明 K_c 与 K_{c0} 充分接近,则此时的 F_s 即为解答。ε 视精度要求决定,对于一般工程问题,可取为 0.005~0.01。由于水平地震力影响系数 K_c 与滑面上的正应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 呈线性关系,上述求解过程往往只需要迭代几次便可达到精度要求。求解水平地震力影响系数 K_c 最小值过程与之相同,此处不再赘述。

4 算例分析

以下通过两个算例的求解,并与传统极限平衡法的计算结果作对比分析,验证本研究方法的合理性。

4.1 算例 1

如图 3 所示的边坡算例[19],边坡剖面、滑动面及土体各项参数标于图中。本研究计算分析如图中所示的两个滑面,滑面 1 为圆弧滑面,滑面 2 为非圆弧滑面,两个滑面均为固定滑面,且与最小安全系数无关。在本算例中,既定的水平地震力系数 $K_{c0} = 0$,分别采用传统算法、其他学者经典算法[16]和本方法计算所得的安全系数见表 1。以滑面 1 的计算结果为例,用本方法计算所得的滑面正应力大小、各条块间接触面上的推力大小以及屈服条件与简化的 Bishop 法的计算结果对比分析分别见图 4~6。

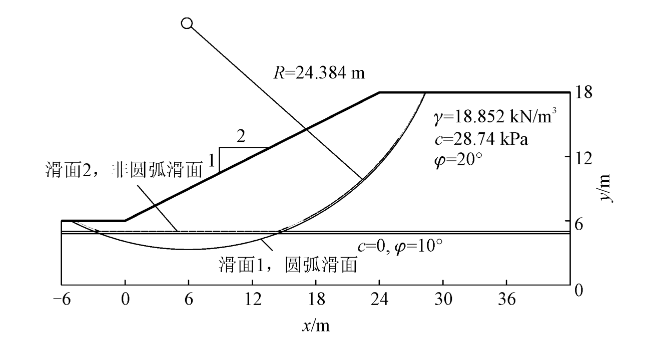


图 3 算例 1 示意图

Fig. 3 No. 1 example slope and parameters

表 1　算例的计算结果与比较

Tab. 1　Calculated results and comparison

序号	计算方法	工况	
		滑面 1，圆弧	滑面 2，非圆弧
1	简化 Bishop 法	2.080	–
2	Spencer 法	2.073	1.373
3	Morgenstern & Price 法	2.076	1.370
4	基于滑面正应力修正法	2.061	1.392
5	本研究方法（下限解）	2.062	1.371
6	本研究方法（上限解）	2.082	1.395

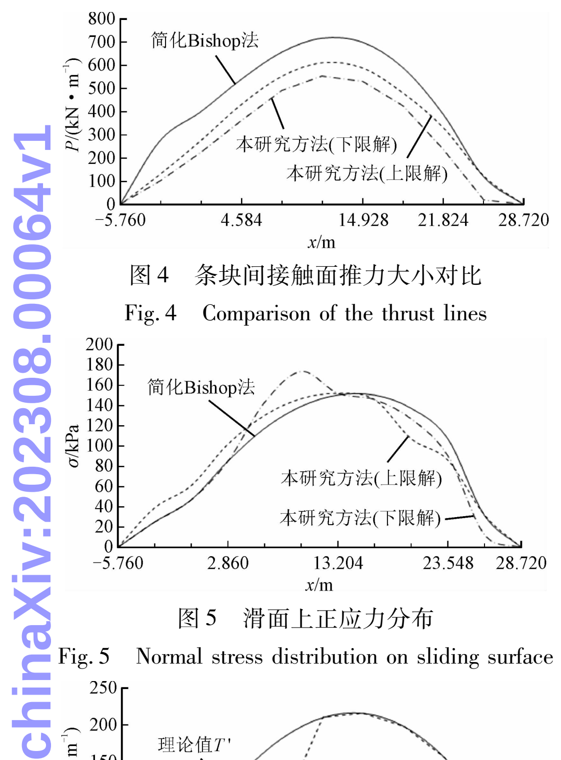


图 4　条块间接触面推力大小对比

Fig. 4　Comparison of the thrust lines

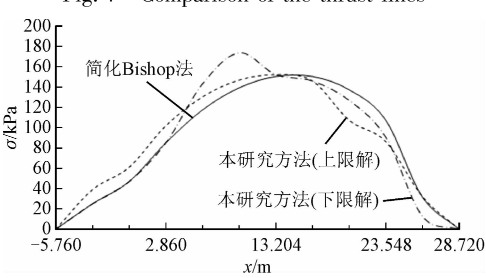


图 5　滑面上正应力分布

Fig. 5　Normal stress distribution on sliding surface

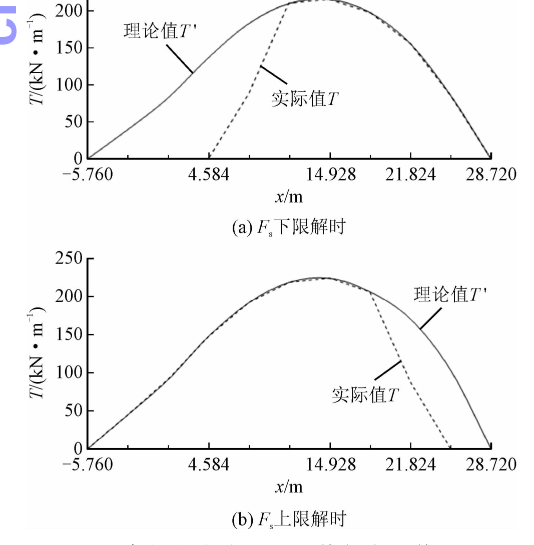


图 6　条间切向力的理论值与实际值对比

Fig. 6　Comparison between the theoretical value and actual value of the tangential force on interslice surfaces

由表 1 可见，对于圆弧滑面，本研究方法计算的安全系数的下限解与基于滑面正应力修正法所得结果十分接近，其他严格条分法计算结果均处于本研究方法上下限解的范围内；对于非圆弧滑面，本研究方法计算的安全系数的下限解与 Morgenstern & Price 法（以下简称“M-P 法”）所得结果十分接近，其他严格条分法计算结果也均处于本研究方法上下限解的范围内。从图 6 中可以看出，F_s 取上下限解答时，条块间接触面上的受力情况均不违背摩尔-库仑准则。由本研究方法通过线性规划得到的安全系数上限解和下限解相差约 1%。

4.2　算例 2

如图 7 所示的边坡算例，图中一般滑面和圆弧滑面均为固定滑面，且与最小安全系数无关，各土层的参数属性见表 2。分别采用简化的 Bishop 法，改进的 M-P 法[20] 和本研究方法求解。3 种方法计算所得结果对比见表 3。M-P 法的基本假设是条块间法向力与剪切力的比值用条间力函数 $f(x)$ 和待定系数 λ 的乘积表示。在改进的 M-P 法中选择的条间力函数

$$f(x) = \sin^{\mu}\left[\pi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\nu}\right] \tag{14}$$

式中：a 和 b 分别为边坡的左右边界；μ 和 ν 为非负参数，一般可取 $\mu = 0 \sim 5.0$，$\nu = 0.5 \sim 2.0$。采用不同参数求解得到的待定系数 λ 和边坡安全系数 F_s 如表 4 所示（以一般滑面，湿坡，$K_{c0} = 0.1$ 为例）。

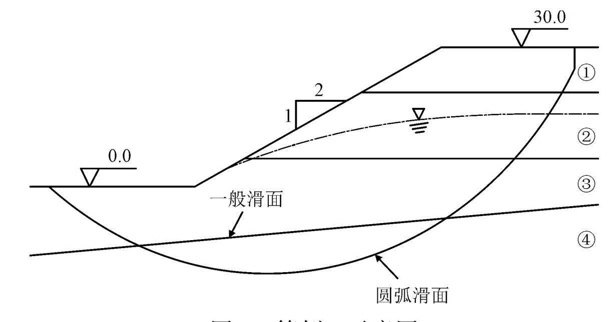


图 7　算例 2 示意图

Fig. 7　No. 2 example slope

表 2　边坡土层参数属性

Tab. 2　Parameters of every stratum

土层	γ/(kN · m^{-3})	C/ kPa	φ/(°)
①	18.2	20.0	32.0
②	18.0	25.0	30.0
③	18.5	40.0	18.0
④	18.8	40.0	28.0

表 3 几种方法计算的安全系数比较

Tab. 3 Comparison of calculated results

	圆弧滑面				一般滑面			
	干坡		湿坡		干坡		湿坡	
K_{c0}	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0.1
简化的 Bishop 法	2.618	1.857	1.681	1.181	–	–	–	–
M-P 法*	2.618	1.969	1.752	1.315	2.197	1.598	1.615	1.171
本研究方法(下限解)	2.553	1.937	1.707	1.270	2.156	1.415	1.462	1.038
本研究方法(上限解)	2.619	1.981	1.755	1.330	2.313	1.654	1.701	1.235

注:* 本表格中 M-P 法的计算结果为条间力函数是常数时。

通过表 3 中的计算结果对比发现,大部分简化的 Bishop 法和条间力函数为常数时的 M-P 法计算所得的安全系数均处于本研究方法上下限解的区间内;圆弧滑面干坡情况下 $K_{c0}=0.1$ 时,简化 Bishop 法的计算结果小于本研究方法下限解答,两者相差 4.1%;圆弧滑面湿坡情况下简化 Bishop 法计算结果均小于本研究下限解答,当 K_{c0} 按表中取值时,分别相差 1.2% 和 7.3%;本研究方法的下限解通常都小于其余方法的计算结果,即利用本研究方法可以找到更小的安全系数。

以一般滑面湿坡条件下 $K_{c0}=0.1$ 这一工况为例,对比表 3 和表 4 中的计算结果可以发现,当 M-P 法的条间力函数取不同参数时,计算结果均处于本研究方法上下限解的区间内。

3 种方法计算所得的正应力分布情况见图 8,推力大小对比见图 9,采用本研究方法条块线上法向力和切向力满足摩尔-库伦准则情况见图 10。

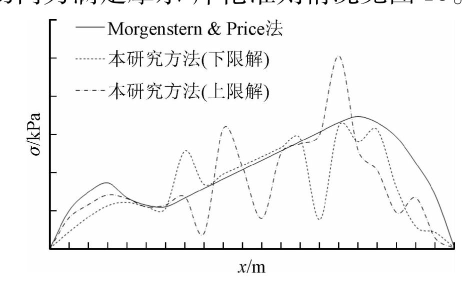


图 8 一般滑面 3 种方法正应力分布对比(湿坡,$K_{c0}=0.1$)

Fig. 8 Comparison of normal stress distribution on slip surface for three methods (wet slope, $K_{c0}=0.1$)

此外,值得注意的是,在不同工况下,本研究方法计算所得的上下限解答之间的差异也不尽相同,二者相差最小仅为 2%,最大约 17%,且如图 8 中所示,正应力分布波动较大,存在多个突变点,这是由于本研究中的滑面正应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 是离散的,并未对其进行其他条件的约束,故本研究方法是满足数学解答的。

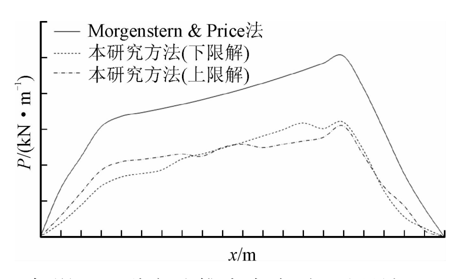


图 9 一般滑面三种方法推力大小对比(湿坡,$K_{c0}=0.1$)

Fig. 9 Comparison of thrust lines on interslice surfaces for three methods (wet slope, $K_{c0}=0.1$)

表 4 M-P 法不同条间力函数选取时的安全系数(以一般滑面,湿坡,$K_{c0}=0.1$ 为例)

Tab. 4 Safety factors by M-P method (general slip surface, wet slope, $K_{c0}=0.1$)

μ	ν	λ	F_s
0	0.5	0.257 1	1.171
0.5	0.5	0.312 2	1.168
	1	0.309 1	1.153
	2	0.367 1	1.152
1	0.5	0.361 5	1.165
	1	0.355 0	1.137
	2	0.446 1	1.156
2	0.5	0.446 1	1.162
	1	0.433 2	1.110
	2	0.566 0	1.175
3	0.5	0.518 0	1.163
	1	0.497 7	1.091
	2	0.625 5	1.193
4	0.5	0.581 9	1.165
	1	0.552 5	1.077
	2	0.746 2	1.207
5	0.5	0.640 4	1.168
	1	0.600 5	1.067
	2	0.820 9	1.219

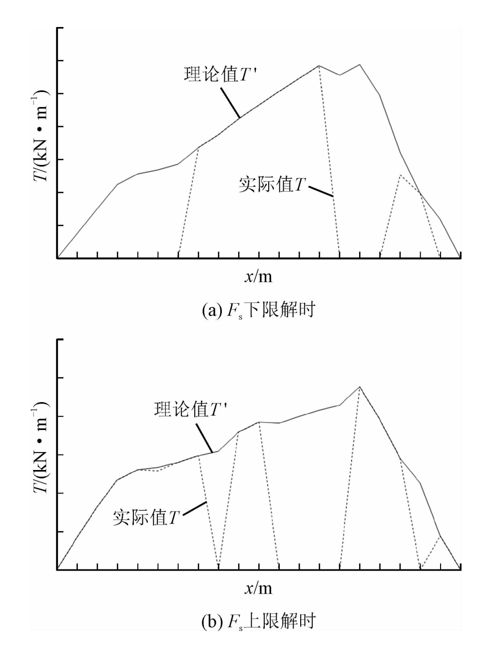


图 10　一般滑面条间切向力理论值与实际值对比（湿坡，$K_{c0}=0.1$）

Fig. 10　Comparison between the theoretical and actual value of the tangential force on interslice surfaces of slope with a general slip surface (wet slope, $K_{c0}=0.1$)

若结合实际情况，可同时将滑面正应力分布曲线为凸曲线作为一组约束条件，则所得上下限解答的区间范围会大大缩小。仍以算例 2 中的一般滑面湿坡条件下 $K_{c0}=0.1$ 为例，未对正应力分布约束时，上下限解答分别为 1.235 和 1.038，相差约 17.3%；对正应力分布加以约束时，上下限解答分别为 1.097 和 1.056，相差约 4%。

此时的正应力分布曲线及摩尔-库伦准则遵循情况与 M-P 法的对比可分别见图 11 和图 12，可以看出，M-P 法的正应力分布存在"凹陷"的情况，且当 μ 和 ν 取值较大时，条间接触面上的法向力与切向力并不能完全满足摩尔-库仑准则，因此可以认为此时的安全系数也是不合理的。

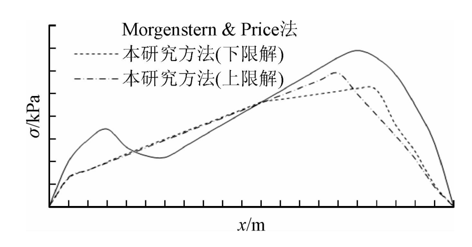


图 11　约束后的滑面正应力分布情况（一般滑面，湿坡，$K_{c0}=0.1$）

Fig. 11　Normal stress distribution on slip surface after constraint (general slip surface, wet slope, $K_{c0}=0.1$)

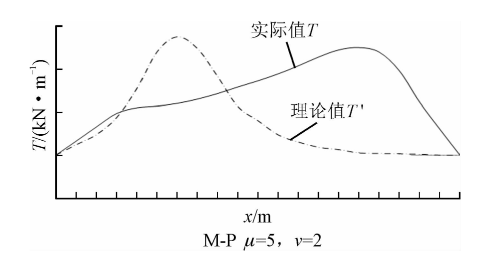


图 12　M-P 法条间力函数 $\mu=5,\nu=2$ 时条间切向力理论值与实际值对比

Fig. 12　Comparison between the theoretical and actual value of the tangential force on interslice surfaces by M-P method ($\mu=5,\nu=2$)

5　结　论

尽管大量计算结果表明不同严格极限平衡法计算结果在工程意义上是非常接近的，通常不超过 10%，但至今仍无法得到严格极限平衡法的上下限范围。无论是探究严格极限平衡法的上下限范围，还是在保证不违背破坏准则与运动许可条件情况下，将基于严格极限平衡法的边坡安全系数上下限范围进一步减小，其在理论与工程应用方面都具有重要意义。本研究在严格极限平衡法理论框架下，以滑面正应力为未知变量，以水平地震力为目标函数，根据滑体力与力矩平衡条件以及滑面、条块界面的剪切强度准则、不抗拉条件和运动许可机制，建立标准线性规划问题，利用标准的单纯形算法可直接求解边坡在设定的安全系数下，水平地震力影响系数最大与最小值。应用简单的迭代改进方式，进而求出给定的水平地震力影响系数下的边坡安全系数上下限解。通过算例的计算对比分析，得到了以下几点结论。

1）将求解边坡安全系数的上、下限解问题转化为求解极限平衡状态下水平地震力影响系数的最大与最小值问题的好处是，将复杂非线性规划问题转化为唯一确定解的标准线性规划问题。

2）计算结果表明，对给定的圆弧与非圆弧滑动面都可以得到满足所有约束条件的安全系数上下限解，对圆弧滑面，上下限解相差小于 5%；对于非圆弧滑面，上下限解最大相差可接近 20%。

3）如果进一步将滑面正应力分布形状进行约束，使其不会出现突变，则非圆弧滑面的安全系数上下限差异也能减小到 5% 以内。

4）传统的简化 Bishop 法与 Morgenstern-Price 法

大多数情况下安全系数在本研究方法的上、下限解之内,但有时也在此范围之外,且条间力出现违背破坏准则的情况,也不能从理论上充分发挥条块界间的抗剪强度。

5)本研究基于严格极限平衡法,既保证了竖直条块间的作用力不违背破坏准则,又在严格极限平衡条件下,尽可能发挥条间的抗剪强度,因此理论上更加严密,计算结果更为可靠。

本研究是基于竖直条块的严格极限平衡法,但不能保证其他斜条块界面的作用力严格遵守破坏准则,如果进一步增加所有可能斜条块界面的约束条件,有可能将现在的 5% 上下限解范围进一步减少。

参考文献:

[1] 李宁,杨敏,李国锋. 再论岩土工程有限元方法的应用问题[J]. 岩土力学,2019,40(3):1140-1148.
LI Ning,YANG Min,LI Guofeng. Revisiting the application of finite element method in geotechnical engineering[J]. Rock and soil mechanics,2019,40(3):1140-1148 (in Chinese).

[2] 高如超,李春光,孙聪,等. 考虑张剪破坏的边坡下限原理有限元法[J]. 岩土力学,2016,37(8):2426-2432.
GAO Ruchao,LI Chunguang,SUN Cong,et al. Lower bound finite element method for analyzing tenso-shear failure of slopes[J]. Rock and soil mechanics,2016,37(8):2426-2432(in Chinese).

[3] 中华人民共和国交通运输部. 公路路基设计规范:JTG D30-2015[S]. 北京:人民交通出版社,2015.

[4] 中华人民共和国水利部. 水利水电工程边坡设计规范:SL 386-2007[S]. 北京:中国水利水电出版社,2007.

[5] 中华人民共和国建设部,国家质量监督检验检疫总局. 岩土工程勘察规范:GB 50021-2001[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2002.

[6] FELLENIUS W. Calculation of the stability of earth dams[C]//Proc. 2nd Congr. Large Dams, Washington, D. C:[s. n.],1936:445-462.

[7] JANBU N,BJERRUM L,KJAERNSLI B. Soil mechanics applied to some engineering problems[M]. [S. l.]:Norwegian Geotechnical Institute Publication,1956.

[8] U. S. Army Corps of Engineers. Stability of slopes and foundations, engineering manual[R]. Vicksburg, Mississippi: Army Corps of Engineers,1967.

[9] JANBU N. Application of composite slip surface for stability analysis[C]//Proceedings of European Conference on Stability of Earth Slopes. Stockholm:[s. n.],1954:43-49.

[10] JANBU N. Slope stability computations[M]//HIRSCHFIELD E, POULOS S. Embankment Dam Engineering: Casagrande Volume. New York:John Wiley,1973:47-86.

[11] MORGENSTERN N R,PRICE V E. The analysis of the stability of general slip surfaces[J]. Géotechnique,1965,15(1):79-93.

[12] SUN G H,CHENG S G,JIANG W,et al. A global procedure for stability analysis of slopes based on the Morgenstern-Price assumption and its applications[J]. Computers and geotechnics,2016,80:97-106.

[13] SPENCER E. A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces[J]. Géotechnique,1967,17(1):11-26.

[14] ZHU D Y,LEE C F. Explicit limit equilibrium solution for slope stability[J]. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics,2002,26(15):1573-1590.

[15] ZHU D Y,LEE C F,JIANG H D. Generalised framework of limit equilibrium methods for slope stability analysis[J]. Géotechnique,2003,53(4):377-395.

[16] 朱大勇,李焯芬,姜弘道,等. 基于滑面正应力修正的边坡安全系数解答[J]. 岩石力学与工程学报,2004,23(16):2788-2791.
ZHU Dayong,LI Chaofen,JIANG Hongdao,et al. Solution of slope safety factor by modifying normal stresses over slip surface[J]. Chinese journal of rock mechanics and engineering,2004,23(16):2788-2791(in Chinese).

[17] RAO S S. Engineering optimization:Theory and practice[M]. 4th ed. Hoboken,NJ,USA:John Wiley & Sons,2009.

[18] CHAPRA S C. 工程与科学数值方法的 MATLAB 实现[M]. 林赐,译. 4 版. 北京:清华大学出版社,2018.

[19] ZHANG X. Slope stability analysis based on the rigid finite element method[J]. Géotechnique,1999,49(5):585-593.

[20] ZHU D Y,LEE C F,QIAN Q H,et al. A concise algorithm for computing the factor of safety using the Morgenstern-Price method[J]. Canadian geotechnical journal,2005,42(1):272-278.

(编辑 史淑英)